

OPTIMIZACIÓN DEL PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS MEDIANTE PROGRAMACION ENTERA MIXTA: UNA METODOLOGÍA PROPUESTA PARA ENCONTRAR LA SOLUCIÓN ÓPTIMA DEL PROBLEMA

Vehicle Routing Problem Optimization Through Mixed Integer Programming: A Methodology Proposed For Finding The Optimal Solution of The Problem.

Marcos Moya Navarro*
marco.moya@ulatina.net

Resumen

La programación entera mixta ha demostrado ser una excelente herramienta para la optimización de los problemas de enrutamiento de vehículos. Los vehículos se mueven desde los centros de distribución de las empresas a sus clientes. Los camiones que llevan a cabo el transporte de estos bienes son limitados en número y capacidad, y los costos de transporte varían entre rutas y tipos de camiones. Además, los clientes requieren diferentes demandas de dichos productos. El objetivo de este trabajo es mostrar las dificultades encontradas para modelar el problema de rutas para vehículos cuando se utilizan modelos de programación matemática entera mixta, y proponer una metodología de solución para encontrar la solución óptima, cuando los modelos matemáticos utilizados no proporcionan la solución óptima por sí mismos.

Palabras clave

Industria, Cadena de suministros, Logística, Optimización, Programación matemática.

Abstract

The mixed integer programming has proven to be an excellent tool for optimizing the vehicle routing problems. The vehicles move from distribution centers of companies to their customers. The trucks carrying out the transport of these goods are limited in number and capacity, and the transportation costs vary between routes and types of trucks. In addition, customers require varying demands for those products. The aim of this paper is to show the difficulties encountered in modeling the vehicle routing problem when mixed integer mathematical programming models are used, and propose a solution methodology to find the optimal solution when the mathematical models used do not provide the optimal solution by themselves.

Keywords

Industry, Supply Chain, Logistics, Optimization, Mathematical Programming.

*Profesor Universidad Latina de Costa Rica

El problema de ruteo de vehículos (VRP por sus siglas en inglés) “se describe como el problema de diseñar un conjunto de rutas desde uno o varios centros de distribución hacia un grupo de clientes o ciudades geográficamente dispersos, sujeto a un conjunto de restricciones” (Laporte, 1991, 1992). Las rutas deben ser de costo mínimo, y los vehículos deberán comenzar y terminar las rutas en los centros de distribución.

Este tipo de problemas es clave en la configuración de una cadena de suministros, especialmente para la distribución de los productos que se fabrican o se almacenan en los centros de distribución de las empresas, localizados algunas veces en el mismo lugar donde se fabrican o bien en lugares geográficamente distintos. Las empresas están siempre muy preocupadas por operar sus cadenas de suministros al menor costo posible, debido a que la distribución de las mercancías representa una cantidad significativa en el valor total del producto, lo que podría restar una ventaja competitiva.

A la fecha, se ha realizado una considerable cantidad de investigación sobre el modelado de este tipo de problemas, los cuales se han agrupado en métodos aproximados y métodos exactos. El modelado mediante programación matemática entera mixta se considera dentro del grupo de los métodos exactos, los cuales se han dividido en alguna de las siguientes categorías, entre otras.

TSP: Modelo del Agente Viajero

MTSP: Modelo del Agente Viajero Múltiple

VRP: Modelo de Ruteo de Vehículos Clásico

MDVRP: Modelo de Ruteo de Vehículos con Múltiples Centros de Distribución

CVRP: Modelo de Ruteo de Vehículos Capacitados

VRPTW: Modelo de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo

El sitio web *The Traveling Salesman Problem* de la Universidad de Waterloo (s.f.) indica que: “Los problemas matemáticos relacionados con el problema del agente viajero (TSP) fueron tratados en el año 1800 por el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton y por el matemático británico Thomas Penyngton Kirkman”.

El sitio web NEOS indica que el *Modelo del Agente Viajero Múltiple* (MTSP) es “una generalización del problema del agente viajero (TSP) en la que se permite más de un vendedor” (Neos Guide, s.f., *Problem Statement*, Párra.1). Dado un conjunto de ciudades donde se localizan los clientes, un centro de distribución con m vendedores, y una métrica de costos, el objetivo del plan estratégico es determinar un recorrido por cada vendedor, de tal manera que el costo total del viaje se reduzca al mínimo, y que cada ciudad sea visitada exactamente una vez por un único vendedor. El *Modelo del Agente Viajero Múltiple* (MTSP) es una relajación del problema de ruteo de vehículos (VRP), si la capacidad del vehículo es suficientemente grande como para no restringir la capacidad del vehículo.

Caric, T. y Gold, H. (2008) indican que el problema de ruteo de vehículos (VRP) se remonta a finales de los años cincuenta del siglo pasado, cuando Dantzig y Ramser establecieron la formulación de programación matemática y el enfoque algorítmico para resolver el problema de la entrega de gasolina en estaciones de servicio. Desde entonces, el interés por el problema de ruteo de vehículos (VRP) evolucionó desde un pequeño grupo de matemáticos a la amplia gama de investigadores y profesionales, de diferentes disciplinas, que participan en este campo en la actualidad. El problema VRP establece que m vehículos, inicialmente ubicados en un depósito, entregarán cantidades discretas de bienes a n clientes. La determinación de la ruta óptima, utilizando un grupo de vehículos para servir

a un grupo de usuarios, representa un problema VRP en las que todas comienzan y terminan en el depósito, y que satisface la restricción de que todos los clientes se sirven solo una vez.

Neo Networking and Emerging Optimization (s.f.) establece que una empresa puede tener varios depósitos desde los que puede servir a sus clientes. Si los clientes están agrupados alrededor de los depósitos, entonces el problema de la distribución debe ser modelado como un conjunto de VRP independiente. Sin embargo, si los clientes y los depósitos se entremezclan, entonces un problema de ruteo de vehículos con múltiples depósitos (MDVRP) debe ser resuelto. El Problema MDVRP requiere la asignación de los clientes a los depósitos. Una flota de vehículos se basa en cada depósito. Cada vehículo origina la ruta desde el depósito en el cual tiene su base, da servicio a los clientes asignados a ese depósito, y vuelve al depósito. El objetivo del problema es dar servicio a todos los clientes y reducir al mínimo el número de vehículos y la distancia de viaje.

Neo Networking también establece que el problema de ruteo de vehículos capacitados (CVRP) considera una flota fija de vehículos de reparto con capacidad fija o variable, la cual debe atender las demandas de los clientes. El objetivo es reducir al mínimo la suma de los tiempos de viaje, con el objetivo de satisfacer la demanda total de productos básicos para cada ruta, la cual no puede exceder la capacidad del vehículo que sirve esa ruta.

Desrochers, Lenstra, Salvendy y Soumis (1988) indican que el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW) consiste de un número de vehículos localizados en un centro de distribución, que deben servir a un grupo de clientes geográficamente dispersos. Cada vehículo tiene una capacidad establecida y cada cliente una demanda específica, que debe ser surtida en un tiempo establecido.

Lau, Sim y Teo (2003) indican que el problema *m*-VRPTW se define formalmente como: dado un número *m* de vehículos y una instancia VRPTW, encontrar *m* o menos rutas con la función objetivo primaria de maximizar el número total de clientes servidos y la función objetivo secundaria de minimizar la distancia total recorrida.

Componentes de los problemas de ruteo de vehículos

Los camiones

Los camiones son el medio en que los productos serán transportados a los clientes desde los centros de distribución.

Los camiones tienen una capacidad limitada, que para efectos de este trabajo se expresará en una unidad agregada de peso medido en kilogramos. Si todos los camiones tienen la misma capacidad, la flota de camiones se considera homogénea. Los problemas de ruteo de vehículos pueden imponer una serie de restricciones a los vehículos en términos de peso, horas de circulación de los vehículos por las carreteras, días y horas de entrega de los productos a los clientes, u otras restricciones.

Los clientes

Los clientes generan las demandas de los productos para ser transportadas hacia sus proveedores. Los productos demandados serán transportados a los clientes dentro de los camiones destinados para tal fin. Dada la variedad y formas de los productos, las demandas se expresan en una unidad agregada; en este caso, para los fines de este trabajo será el peso en kilogramos. Los camiones parten del centro de distribución, visitan a los clientes exactamente una vez y regresan al centro de distribución (Ciclo Hamiltoniano¹¹).

Los centros de distribución

Los centros de distribución son los lugares desde donde los camiones cargan las mercancías para ser entregadas a los clientes. Puede ser que la empresa disponga de una configuración de la cadena de suministros con un solo centro de

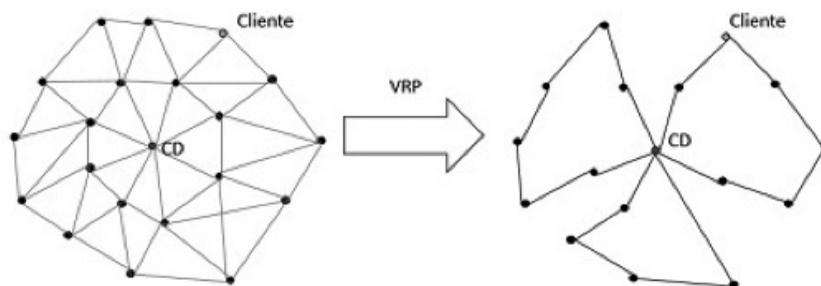
distribución, ubicado dentro o fuera de la planta donde se producen los productos demandados, o bien disponer de varios centros de distribución ubicados geográficamente en zonas distintas de donde están las plantas de producción de esos bienes.

Definición del problema de ruteo de vehículos (VRP) por resolver

La empresa dispone de una flota fija de camiones, propios o alquilados, para la entrega de los productos, todos con la misma capacidad o con capacidades diferentes, los cuales deben de atender las demandas de sus clientes conocidos. Estos camiones se mueven transportando los productos desde un único centro de distribución hasta los clientes. El objetivo es determinar el conjunto de clientes que debe visitar cada camión disponible, de tal manera que no se excedan las capacidades de los camiones, y que se satisfagan las demandas de los clientes al menor costo posible.

La Figura 1 ilustra de manera general el problema de ruteo de vehículos por resolver.

Figura 1



Elaboración propia.

Formulación matemática del problema

En este trabajo se considerará una modificación parcial de la formulación del problema de tres índices para el ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW), propuesto por Fisher y Jaukumar (1978, 1981). Aunque esta formulación es una solución heurística, esto no garantiza la solución óptima, es la base para determinar una solución óptima del problema, siguiendo el procedimiento que se indicará más adelante.

Notación:

C_{ij} : Costo de transportar la mercancía desde el nodo i (cliente i) hasta el nodo j (cliente j).

X_{ijk} : Variable binaria que indica si el camión k transporta mercancía desde el nodo i (cliente i) hasta el nodo j (cliente j). Si la mercancía se transporta del nodo i al nodo j utilizando el camión k , la variable X_{ijk} toma el valor de 1. En caso contrario toma el valor de 0.

Y_{ik} : Variable que indica si el nodo i (cliente i) es visitado por el camión k . Si el nodo i es visitado por el camión k , la variable Y_{ik} toma el valor de 1. En caso contrario toma el valor de 0.

d_i : demanda del nodo i (cliente i).

D_k : Capacidad máxima del camión k .

V: Conjunto total de nodos. Se incluyen los nodos que representan a los clientes y al centro de distribución, donde el nodo 1 representa el centro de distribución.

S: Conjunto parcial de nodos. Solo incluye los nodos que representan a los clientes. ($S \subset V$)

Modelo matemático heurístico propuesto por Fisher y Jaukumar, parcialmente modificado² en este trabajo para convertirlo en un modelo de ruteo de vehículos capacitados (CVRP).

$$\text{Minimizar } X_0 = \sum_{k=1}^m \sum_{i \neq j} C_{ij} X_{ijk}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n d_i y_{ik} \leq D_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (\text{a})$$

$$\sum_{k=1}^m y_{ik} = \begin{cases} m & ; \quad i = 1 \\ 1 & ; \quad i = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (\text{b})$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ijk} = y_{jk} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (\text{c})$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ijk} = y_{jk} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (\text{d})$$

$$\sum_{i,j \in S} X_{ijk} \leq |S| - 1 \quad ; \quad S \subseteq V; \quad |S| \geq 2; \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (\text{e})$$

$$X_{ijk} \in (0,1) \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n; \quad k = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$y_{ik} \in (0,1) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad k = 1, 2, 3, \dots, m$$

El grupo de restricciones (a) garantiza que las mercancías transportadas no exceden las capacidades de cada uno de los m camiones disponibles. El grupo de restricciones (b) garantiza que del centro de distribución parten exactamente los m camiones disponibles. El grupo de restricciones (c) y (d) garantizan que cada cliente es visitado solo por un camión y que cada camión solo visita un cliente. Finalmente, el grupo de restricciones (e) intentan la eliminación de *sub-tours*³. Como se demostrará más adelante, la eliminación de *sub-tours* va a depender de la estructura de costos de transportación de que disponga la cadena de suministros en estudio.

Definición de la cadena de suministros por estudiar

La empresa dispone de un centro de distribución desde donde debe enviar los productos a sus clientes. Cuenta con una flota de tres camiones con capacidades de 2500 kilogramos el camión 1, y de 1500 kilogramos los camiones 2 y 3.

Se requiere enviar el producto a diez clientes (nodos enumerados del 2 al 11), ubicados en distintas zonas geográficas con las siguientes demandas de productos.

| CLIENTE | Demanda requerida (Kilogramos) |
|---------|--------------------------------|
| 2 | 645 |
| 3 | 403 |
| 4 | 218 |
| 5 | 510 |
| 6 | 577 |
| 7 | 619 |
| 8 | 573 |
| 9 | 470 |
| 10 | 415 |
| 11 | 398 |

Para determinar la capacidad del modelo matemático CVRP, modificado parcialmente, de proporcionar la solución óptima a la primera vez que se resuelve, se consideran dos escenarios de costos posibles en este trabajo:

1. *Escenario 1*: Costos de transportar las mercancías del nodo i (cliente i) al nodo j (cliente j) iguales al costo de transportar las mercancías del nodo j (cliente j) al nodo i (cliente i). Por ejemplo: enviar un camión del cliente 1 al cliente 2 se costea igual que enviar el camión desde el cliente 2 al cliente 1.
2. *Escenario 2*: Variaciones de hasta un máximo de 30%, y 50% en los costos de transportar las mercancías desde el nodo i (cliente i) hasta el nodo j (cliente j) y viceversa.

Planteamiento del modelo de programación matemática CVRP bajo el Escenario 1

La estructura de costos utilizado para resolver problema de ruteo de vehículos capacitados bajo el Escenario 1 se muestra en la Tabla 1. Se supone en este trabajo que el costo de visitar el nodo j (cliente j) desde el nodo i (cliente i) y viceversa es el mismo, no importa cuál de los camiones haga la visita.

Tabla 1: Costos de transporte entre nodos

| Desde Nodo | Hacia Nodo | | | | | | | | | | |
|---------------|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | M | 375 | 140 | 82 | 300 | 137 | 71 | 118 | 144 | 250 | 138 |
| 2 | 375 | M | 91 | 105 | 78 | 63 | 146 | 76 | 125 | 108 | 68 |
| 3 | 140 | 91 | M | 140 | 35 | 40 | 83 | 96 | 107 | 57 | 61 |
| 4 | 82 | 105 | 140 | M | 124 | 93 | 71 | 135 | 100 | 72 | 106 |
| 5 | 300 | 78 | 35 | 124 | M | 70 | 138 | 116 | 90 | 100 | 81 |
| 6 | 137 | 63 | 40 | 93 | 70 | M | 107 | 74 | 109 | 123 | 375 |
| 7 | 71 | 146 | 83 | 71 | 138 | 107 | M | 99 | 50 | 53 | 34 |
| 8 | 118 | 76 | 96 | 135 | 116 | 74 | 99 | M | 119 | 98 | 124 |
| 9 | 144 | 125 | 107 | 100 | 90 | 109 | 50 | 119 | M | 59 | 78 |
| 10 | 250 | 108 | 57 | 72 | 100 | 123 | 53 | 98 | 59 | M | 120 |
| 11 | 138 | 68 | 61 | 106 | 81 | 375 | 34 | 124 | 78 | 120 | M |

Nota: M representa un costo muy grande

Para formular y resolver el problema se utilizó el programa de optimización *OR Brainware decision Tools*⁴.



En general, el número de variables requeridas para representar este tipo de modelo matemático es $n^2 * k$, donde n es el número total de nodos en la cadena de suministro y k representa el número de camiones disponibles. En este caso, se tienen 11 nodos y 3 camiones, por lo que el número total de variables es $11^2 * 3 = 363$.

La formulación matemática correspondiente al problema planteado, así como la solución obtenida con el programa *OR Brainware Decision Tools*, utilizando el módulo de *Planeamiento con programación lineal*, se muestran en los Apéndices A y B adjuntos, al final del artículo.

El modelo CVRP planteado para la resolución de este problema, el cual consta de 363 variables y 83 restricciones funcionales, produjo la solución que se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2.

| Camión | Sub-Tour 1 | Sub-Tour 2 |
|--------|------------|------------|
| 1 | 1-7-1* | 3-5-6-3 |
| 2 | 1-8-1 | 9-10-9 |
| 3 | 1-4-1 | 2-11-2 |

* Datos leídos del informe de respuesta producido por el programa *OR Brainware decisión Tools* y presentado en el Apéndice B.

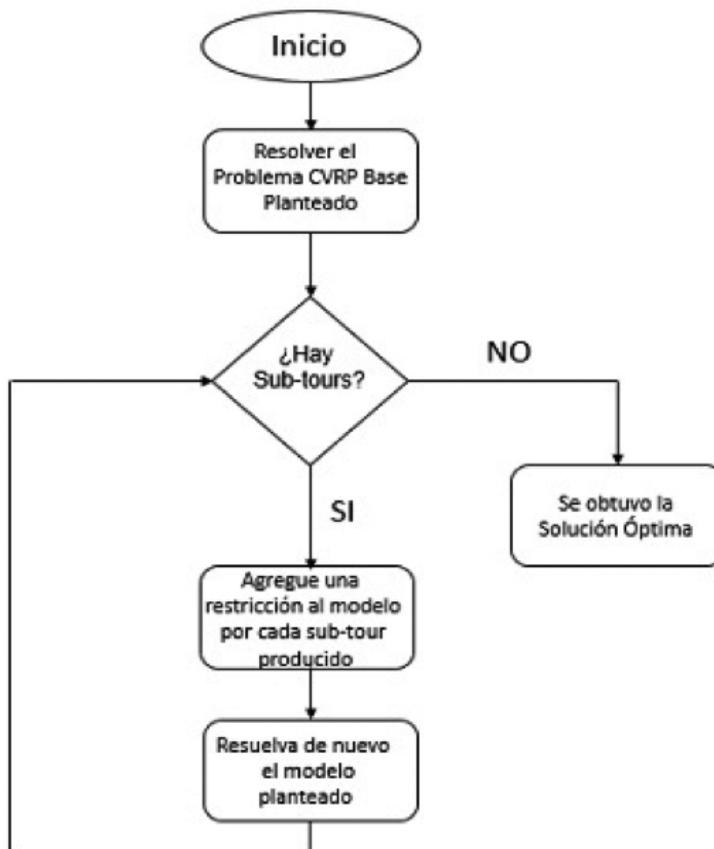
Como se observa en la Tabla 2 la formulación matemática presentada en el Apéndice B no logró alcanzar la solución óptima dado que se produjeron *sub-tours*. Por ejemplo, para el camión 1 la ruta trazada por el modelo indica que el camión

• 1 parte del centro de distribución, visita al cliente 7 y luego regresa al centro de distribución. Paralelamente, el camión 1 parte del cliente 3, visita posteriormente al cliente 5, luego al cliente 6 y regresa al cliente 3. La solución inicial produjo un total de 6 *sub-tours*. De manera similar está ocurriendo con los camiones 2 y 3.

Entonces, ¿cómo se logra obtener una solución óptima al problema planteado?

Después de determinar, mediante la solución del problema de ruteo CVRP base, que no se alcanzó la solución óptima, comienza el proceso de encontrar la solución óptima. Para ello se propone el procedimiento descrito en el diagrama de flujo mostrado en la Figura 2.

Figura 2. Procedimiento para alcanzar la solución óptima en el problema de ruteo de vehículos.



Como lo indica el procedimiento anterior, se agrega el siguiente conjunto de restricciones al modelo planteado en el Apéndice A, una por cada sub-tour encontrado en la solución.

$$\sum_{\forall i} \sum_{\forall j} X_{ijk} \leq (p - 1)$$

Donde p representa el número de nodos involucrados en el sub-tour. ¿Cuántas restricciones deben agregarse en total al problema? La respuesta a esta pregunta es tantas como sea necesario hasta encontrar la solución óptima del problema.

Para el caso del problema planteado, se generan las siguientes seis (6) restriccio-

nes adicionales al modelo con base en los sub-tours mostrados en la Tabla 2.

$$\begin{aligned} X_{171} + X_{711} &\leq 1 & X_{351} + X_{561} + X_{631} &\leq 2 \\ X_{182} + X_{812} &\leq 1 & X_{9102} + X_{1092} &\leq 1 \\ X_{143} + X_{413} &\leq 1 & X_{2113} + X_{1123} &\leq 1 \end{aligned}$$

El programa *OR Brainware Decision Tools* permite al usuario agregar tantas restricciones como sean necesarias. En este caso se le indica agregar seis, se introducen los coeficientes tecnológicos respectivos y se resuelve de nuevo el problema aumentado. La solución obtenida se muestra en la Tabla 3.

The screenshot shows the OR Brainware Decision Tools interface. A table displays constraints for variables Y111, Y112, and Y113. The objective function is Max o Min X0 = 882. A dialog box is open, allowing the user to specify the number of variables to add (empty field) and the number of constraints to add (6). The dialog box has 'Ejecutar' and 'Cancelar' buttons.

| | Y111 | Y112 | Y113 | | Max o Min X0 = | 882 |
|---------------|------|------|------|------|----------------|------|
| Restricción1 | 398 | 0 | 0 | 2109 | <= | 2500 |
| Restricción2 | 0 | 398 | 0 | 1458 | <= | 1500 |
| Restricción3 | 0 | 0 | 398 | 1261 | <= | 1500 |
| Restricción4 | 0 | 0 | 0 | 3 | = | 3 |
| Restricción5 | 0 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| Restricción6 | 0 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| Restricción7 | 0 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| Restricción8 | 0 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| Restricción9 | 0 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| Restricción10 | 0 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| Restricción11 | 0 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| Restricción12 | 0 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| Restricción13 | 0 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| Restricción14 | 1 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| Restricción15 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 0 |
| Restricción16 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 0 |
| Restricción17 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 0 |
| Restricción18 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 0 |
| Restricción19 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 0 |
| Restricción20 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 0 |
| Restricción21 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 0 |

Tabla 3.

| Camión | Sub-Tour 1 | Sub-Tour 2 | Sub-Tour 3 |
|--------|------------|------------|------------|
| 1 | 1-4-1 | 2-6-2 | 9-10-9 |
| 2 | 1-7-11-1 | | |
| 3 | 1-8-1 | 3-5-3 | |

La solución obtenida después de agregar las seis restricciones anteriores indica que se obtuvieron seis nuevos sub-tours, por lo que con base en la Tabla 3 se agregan las siguientes seis (6) restricciones adicionales al modelo anterior con 89 restricciones funcionales:

$$\begin{aligned} X_{141} + X_{411} &\leq 1 & X_{261} + X_{621} &\leq 1 & X_{9101} + X_{1091} &\leq 1 \\ X_{172} + X_{712} + X_{1112} &\leq 2 \\ X_{183} + X_{813} &\leq 1 & X_{353} + X_{533} &\leq 1 \end{aligned}$$

Se resuelve de nuevo el problema aumentado. La solución obtenida se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4.

| Camión | Sub-Tour 1 | Sub-Tour 2 |
|--------|------------|------------|
| 1 | 1-8-1 | 2-6-5-2 |
| 2 | 1-7-1 | 3-11-3 |
| 3 | 1-9-10-4-1 | |

La solución mostrada en la Tabla 4 continúa presentando sub-tours, por lo que deben agregarse otras nuevas cinco (5) restricciones funcionales adicionales al modelo de 95 restricciones anterior. Con base en la Tabla 4, se construyeron las siguientes cinco restricciones funcionales.

$$\begin{aligned} X_{181} + X_{811} &\leq 1 & X_{261} + X_{651} + X_{521} &\leq 2 \\ X_{172} + X_{712} &\leq 1 & X_{3112} + X_{1132} &\leq 1 \\ X_{193} + X_{9103} + X_{1043} + X_{413} &\leq 3 \end{aligned}$$

El nuevo problema por resolver contiene ahora 100 restricciones. La nueva solución obtenida se resume en la Tabla 5 e indica que se volvieron a producir *sub-tours*. No se dispone todavía de la solución óptima y debe continuarse con el procedimiento establecido, sin desfallecer en el camino.

Tabla 5.

| Camión | Sub-Tour 1 | Sub-Tour 2 |
|--------|------------|------------|
| 1 | 1-4-2-8-1 | 3-5-3 |
| 2 | 1-11-7-1 | |
| 3 | 1-6-1 | 9-10-9 |

Con base en los *sub-tours* generados en la Tabla 5 se agregan las siguientes cinco (5) restricciones adicionales al modelo de 100 restricciones anterior:

$$\begin{aligned} X_{141} + X_{421} + X_{281} + X_{811} &\leq 3 & X_{351} + X_{531} &\leq 1 \\ X_{1112} + X_{1172} + X_{712} &\leq 2 \\ X_{163} + X_{613} &\leq 1 & X_{9103} + X_{1093} &\leq 1 \end{aligned}$$

Una nueva solución al problema con el modelo de 105 restricciones produce los resultados mostrados en la Tabla 6. La Tabla 6 indica que se continúa sin obtener la solución óptima.

Tabla 6.

| Camión | Sub-Tour 1 | Sub-Tour 2 |
|--------|------------|------------|
| 1 | 1-4-10-9-1 | 2-5-2 |
| 2 | 1-8-6-1 | |
| 3 | 1-7-1 | 3-11-3 |

Con base en los resultados de la Tabla 6 se agregan las siguientes cinco (5) restricciones adicionales al modelo de 105 restricciones anterior:

$$\begin{aligned} X_{141} + X_{4101} + X_{1091} + X_{911} &\leq 3 & X_{251} + X_{521} &\leq 1 \\ X_{182} + X_{862} + X_{612} &\leq 2 \\ X_{173} + X_{713} &\leq 1 & X_{3113} + X_{1133} &\leq 1 \end{aligned}$$

Se resuelve de nuevo el problema aumentado, que ahora contiene 110 restricciones. La solución obtenida se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7.

| Camión | Sub-Tour 1 | Sub-Tour 2 |
|--------|----------------|------------|
| 1 | 1-8-2-5-10-4-1 | |
| 2 | 1-9-7-1 | |
| 3 | 1-11-1 | 3-6-3 |

La Tabla 7 muestra que el número de *sub-tours* ya muestra una tendencia a disminuir, por lo que podría estar cerca la solución óptima. Se agregan las siguientes cuatro (4) restricciones adicionales al modelo de 110 restricciones anterior:

$$\begin{aligned} X_{181} + X_{821} + X_{251} + X_{5101} + X_{1041} + X_{411} &\leq 5 \\ X_{192} + X_{972} + X_{712} &\leq 2 \\ X_{1113} + X_{1113} &\leq 1 & X_{363} + X_{633} &\leq 1 \end{aligned}$$

Se resuelve de nuevo el problema aumentado. La solución obtenida con el modelo de 114 restricciones y 363 variables se muestra en la Tabla 8.

Tabla 8.

| Camión | Sub-Tour 1 | Sub-Tour 2 |
|--------|----------------|------------|
| 1 | 1-4-10-5-2-8-1 | |
| 2 | 1-11-1 | 3-6-3 |
| 3 | 1-9-7-1 | |

Los resultados de la Tabla 8 comienzan a indicar que ya se están formando las rutas para cada uno de los camiones; sin embargo, todavía la solución muestra *sub-tours* producidos por el camión 2. La Tabla 8 indica que deben agregarse cuatro (4) restricciones adicionales al modelo de 114 restricciones anterior. Las restricciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} X_{141} + X_{4101} + X_{1051} + X_{521} + X_{281} + X_{811} &\leq 5 \\ X_{1112} + X_{1112} &\leq 1 & X_{362} + X_{632} &\leq 1 \\ X_{193} + X_{973} + X_{733} &\leq 2 \end{aligned}$$

Se resuelve de nuevo el problema aumentado con 118 restricciones. La solución obtenida se muestra en la Tabla 9. Todavía debe continuarse iterando debido a la presencia de *sub-tours* producidos ahora por el camión 1.

Tabla 9.

| Camión | Sub-Tour 1 | Sub-Tour 2 |
|--------|------------|------------|
| 1 | 1-4-10-8-1 | 2-11-2 |
| 2 | 1-7-9-1 | |
| 3 | 1-3-5-6-1 | |

Con base en la Tabla 9, se adicionan las siguientes cuatro (4) restricciones al modelo de 118 restricciones anterior, y se resuelve el modelo.

$$X_{141} + X_{4101} + X_{1081} + X_{811} \leq 3 \quad X_{2111} + X_{1121} \leq 1$$

$$X_{172} + X_{792} + X_{912} \leq 2$$

$$X_{133} + X_{353} + X_{563} + X_{613} \leq 1$$

La Tabla 10 resume los resultados obtenidos. Se observa que ya no hay ningún camión que produzca *sub-tours*, por lo que los resultados mostrados en la Tabla 10 contienen la solución óptima.

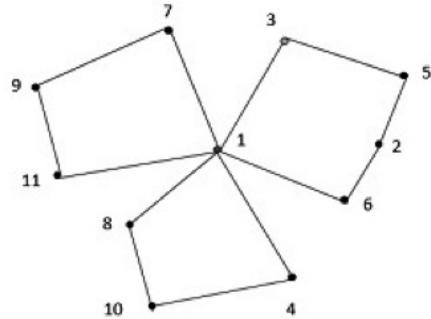
La solución indica que para minimizar el costo total de transporte de los productos, desde el centro de distribución hasta cada uno de los diez clientes, los camiones deben hacer las siguientes rutas:

Tabla 10.

| Camión | Solución Óptima |
|--------|-----------------|
| 1 | 1-3-5-2-6-1 |
| 2 | 1-7-9-11-1 |
| 3 | 1-8-10-4-1 |

El costo total mínimo de transporte es de 1125 unidades monetarias. Como ya se eliminaron los *sub-tours* se dispone de una solución óptima con un costo total mínimo de 1125 unidades monetarias. La Figura 3 resume la solución óptima:

Figura 3. Solución óptima del problema de ruteo de vehículos.



Elaboración propia.

Para alcanzar la solución óptima fue necesario agregar 39 restricciones adicionales al modelo matemático original, las cuales se muestran en el Apéndice C, por lo que el modelo final resultante tiene 122 restricciones funcionales con 363 variables de decisión. Como se observa, este tipo de modelos contienen gran cantidad de variables y restricciones. Sin embargo, con los programas computacionales disponibles es factible resolver estos problemas con relativa facilidad.

Impacto de los costos en la solución del problema de ruteo CVRP base

¿Qué ocurre cuando los costos de transportación son diferentes entre los nodos i y j y viceversa? ¿Cómo impacta la solución obtenida con el modelo matemático CVRP base planteado?

Para estudiar el impacto de la variación en los costos de transportación, sobre la solución óptima obtenida con el modelo matemático CVRP base planteado, se estudiaron variaciones en los costos de hasta 30%, y 50% en ir del nodo i al nodo j y viceversa.

Los resultados del modelo CVRP base, cuando la variación en los costos fue de hasta un máximo de 30%, se muestran en la Tabla 11 indican que el modelo matemático CVRP base no logra encontrar la solución óptima.

Tabla 11.

| Camión | Sub-Tour 1 | Sub-Tour 2 |
|--------|--------------|------------|
| 1 | 1-7-11-2-6-1 | |
| 2 | 1-8-1 | 9-10-9 |
| 3 | 1-4-1 | 3-5-3 |

De manera similar, cuando la variación en los costos fue de hasta un máximo de 50%, el modelo CVRP base tampoco logró encontrar la solución óptima. La Tabla 12 presenta los resultados obtenidos.

Tabla 12.

| Camión | Sub-Tour 1 | Sub-Tour 2 |
|--------|------------|------------|
| 1 | 1-7-1 | 3-6-5-3 |
| 2 | 1-8-1 | 9-10-9 |
| 3 | 1-4-1 | 2-11-2 |

Como conclusión, el modelo CVRP base requiere del procedimiento descrito en la Figura 2 con variaciones de un máximo de hasta 30% y 50% para arriba, o para en los costos de ir desde el nodo i hasta el nodo j y viceversa, el modelo matemático CVRP base no logra encontrar la solución óptima a la primera vez, por lo que el modelo matemático requiere del procedimiento descrito anteriormente para alcanzar la solución óptima.

Notas

1. Véase la definición en:

Definición de ciclo Hamiltoniano (s.f.) Recuperado desde:

<https://www.google.com/webhp?sourceid=chromeinstant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=definicion%20ciclo%20hamiltoniano>

Laporte, G. (1991), *The Vehicle Routing Problem: An Overview of Exact and Approximate Algorithms*. Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montreal, C.P. 6128 Station A, Montreal, Canadá.

2. Se eliminaron las restricciones correspondientes a las ventanas de tiempo en el modelo, para convertirlo en un modelo de ruteo de vehículos capacitado (CVRP).
3. Se originan *sub-tours* cuando a un camión se le asigna más de una ruta simultáneamente.
4. *OR Brainware Decision Tools* es una marca registrada de *ORBrainware.Com*

Referencias

Caric, T. y H. Gold, (2008). *Vehicle Routing Problem*. I-Tech Education and Publishing KG, Vienna, Austria. Recuperado desde: https://bib.irb.hr/datoteka/433524.Vehnicle_Routing_Problem.pdf

Definición ciclo Hamiltoniano (s.f.). Recuperado desde: <https://www.google.com/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=definicion%20ciclo%20hamiltoniano>

Desrochers, M.; Lenstra, J.K.; M.W.P. Salvendy y F.Soumis (1988). *Vehicle Routing with Time Windows: Optimization and Approximations*. Elsevier Science Publishers B.V (North-Holland). Recuperado desde: <http://oai.cwi.nl/oai/asset/2036/2036A.pdf>

Fisher, M.L. y Jaukumar, R. (1978). *A Decomposition Algorithm for Large Scale Vehicle Routing* (Working Paper 78-11-05). Pennsylvania, Estados Unidos: University of Pennsylvania, Department of Decision Sciences.

Fisher, M.L. y Jaukumar, R. (1981). A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing, *Networks* 11, 109-124.

Laporte, G. (1991). *The Vehicle Routing Problem: An Overview of Exact and Approximate Algorithms*. Montreal, Canadá: Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal.

Laporte, G. (1992). The Traveling Salesman Problem: An Overview of Exact and Approximate Algorithms. *European Journal of Operational Research*, 59(2), 231-248. Recuperado desde: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.89.3073&rep=rep1&type=pdf>

Lau, H. Ch., M. Sim y K. M. Teo (2003). Vehicle Routing Problem with Time Windows and a Limited Number of Vehicles. *European Journal of Operational Research* 148 (2003), 559-569. Recuperado desde: <http://www.mysmu.edu/faculty/hclau/EJOR03-VRPTW-limited-vehs.pdf>

Neonet (s.f.). *Working and Emerging Optimization*. Multiple Depot VRP. Recuperado desde: <http://neo.lcc.uma.es/vrp/vrp-flavors/multiple-depot-vrp/>

Neos Guide (s.f.). *Multiple Traveling Salesman Problem (mTSP)*. Recuperado desde: <http://www.neos-guide.org/content/multiple-traveling-salesman-problem-mtsp>

Universidad de Waterloo (s.f.). *History of the TSP*. Recuperado desde: <http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/history>

Recibido: 1 de octubre del 2015.
Reenviado: 1 de febrero del 2016.
Aceptado: 1 de marzo del 2016.

APÉNDICE A

Modelo matemático CVRP Base

Min $X_0 = 375X121+ 375X122+ 375X123+ 140X131+ 140X132+ 140X133+ 82X141+ 82X142+ 82X143+ 300X151+ 300X152+ 300X153+ 137X161+ 137X162+ 137X163+ 71X171+ 71X172+ 71X173+ 118X181+ 118X182+ 118X183+ 144X191+ 144X192+ 144X193+ 250X101+ 250X102+ 250X103+ 138X1111+ 138X1112+ 138X1113+ 375X211+ 375X212+ 375X213+ 91X231+ 91X232+ 91X233+ 105X241+ 105X242+ 105X243+ 78X251+ 78X252+ 78X253+ 63X261+ 63X262+ 63X263+ 146X271+ 146X272+ 146X273+ 76X281+ 76X282+ 76X283+ 125X291+ 125X292+ 125X293+ 108X2101+ 108X2102+ 108X2103+ 68X2111+ 68X2112+ 68X2113+ 140X311+ 140X312+ 140X313+ 91X321+ 91X322+ 91X323+ 140X341+ 140X342+ 140X343+ 35X351+ 35X352+ 35X353+ 40X361+ 40X362+ 40X363+ 83X371+ 83X372+ 83X373+ 96X381+ 96X382+ 96X383+ 107X391+ 107X392+ 107X393+ 57X3101+ 57X3102+ 57X3103+ 61X3111+ 61X3112+ 61X3113+ 82X411+ 82X412+ 82X413+ 105X421+ 105X422+ 105X423+ 140X431+ 140X432+ 140X433+ 124X451+ 124X452+ 124X453+ 93X461+ 93X462+ 93X463+ 71X471+ 71X472+ 71X473+ 135X481+ 135X482+ 135X483+ 100X491+ 100X492+ 100X493+ 72X4101+ 72X4102+ 72X4103+ 106X4111+ 106X4112+ 106X4113+ 300X511+ 300X512+ 300X513+ 78X521+ 78X522+ 78X523+ 35X531+ 35X532+ 35X533+ 124X541+ 124X542+ 124X543+ 70X561+ 70X562+ 70X563+ 138X571+ 138X572+ 138X573+ 116X581+ 116X582+ 116X583+ 90X591+ 90X592+ 90X593+ 100X5101+ 100X5102+ 100X5103+ 81X5111+ 81X5112+ 81X5113+ 137X611+ 137X612+ 137X613+ 63X621+ 63X622+ 63X623+ 40X631+ 40X632+ 40X633+ 93X641+ 93X642+ 93X643+ 70X651+ 70X652+ 70X653+ 107X671+ 107X672+ 107X673+ 74X681+ 74X682+ 74X683+ 109X691+ 109X692+ 109X693+ 123X6101+ 123X6102+ 123X6103+ 375X6111+ 375X6112+ 375X6113+ 71X711+ 71X712+ 71X713+ 146X721+ 146X722+ 146X723+ 83X731+ 83X732+ 83X733+ 71X741+ 71X742+ 71X743+ 138X751+ 138X752+ 138X753+ 107X761+ 107X762+ 107X763+ 99X781+ 99X782+ 99X783+ 50X791+ 50X792+ 50X793+ 53X7101+ 53X7102+ 53X7103+ 34X7111+ 34X7112+ 34X7113+ 118X811+ 118X812+ 118X813+ 76X821+ 76X822+ 76X823+ 96X831+ 96X832+ 96X833+ 135X841+ 135X842+ 135X843+ 116X851+ 116X852+ 116X853+ 74X861+ 74X862+ 74X863+ 99X871+ 99X872+ 99X873+ 119X891+ 119X892+ 119X893+ 98X8101+ 98X8102+ 98X8103+ 124X8111+ 124X8112+ 124X8113+ 144X911+ 144X912+ 144X913+ 125X921+ 125X922+ 125X923+ 107X931+ 107X932+ 107X933+ 100X941+ 100X942+ 100X943+ 90X951+ 90X952+ 90X953+ 109X961+ 109X962+ 109X963+ 50X971+ 50X972+ 50X973+ 119X981+ 119X982+ 119X983+ 59X9101+ 59X9102+ 59X9103+ 78X9111+ 78X9112+ 78X9113+ 250X1011+ 250X1012+ 250X1013+ 108X1021+ 108X1022+ 108X1023+ 57X1031+ 57X1032+ 57X1033+ 72X1041+ 72X1042+ 72X1043+ 100X1051+ 100X1052+ 100X1053+ 123X1061+ 123X1062+ 123X1063+ 53X1071+ 53X1072+ 53X1073+ 98X1081+ 98X1082+ 98X1083+ 59X1091+ 59X1092+ 59X1093+ 120X1011+ 120X1012+ 120X1013+ 138X1111+ 138X1112+ 138X1113+ 68X1121+ 68X1122+ 68X1123+ 61X1131+ 61X1132+ 61X1133+ 106X1141+ 106X1142+ 106X1143+ 81X1151+ 81X1152+ 81X1153+ 375X1161+ 375X1162+ 375X1163+ 34X1171+ 34X1172+ 34X1173+ 124X1181+ 124X1182+ 124X1183+ 78X1191+ 78X1192+ 78X1193+ 120X11101+ 120X11102+ 120X11103+ 0Y11+ 0Y12+ 0Y13+ 0Y21+ 0Y22+ 0Y23+ 0Y31+ 0Y32+ 0Y33+ 0Y41+ 0Y42+ 0Y43+ 0Y51+ 0Y52+ 0Y53+ 0Y61+ 0Y62+ 0Y63+ 0Y71+ 0Y72+ 0Y73+ 0Y81+ 0Y82+ 0Y83+ 0Y91+ 0Y92+ 0Y93+ 0Y101+ 0Y102+ 0Y103+ 0Y111+ 0Y112+ 0Y113$

S.A

645Y21 + 403Y31 + 218Y41 + 510Y51 + 577Y61 + 619Y71 + 573Y81 + 470Y91 + 415Y101 + 398Y111 <= 2500
645Y22 + 403Y32 + 218Y42 + 510Y52 + 577Y62 + 619Y72 + 573Y82 + 470Y92 + 415Y102 + 398Y112 <= 1500
645Y23 + 403Y33 + 218Y43 + 510Y53 + 577Y63 + 619Y73 + 573Y83 + 470Y93 + 415Y103 + 398Y113 <= 1500
1Y11 + 1Y12 + 1Y13 = 3
1Y21 + 1Y22 + 1Y23 = 1
1Y31 + 1Y32 + 1Y33 = 1
1Y41 + 1Y42 + 1Y43 = 1
1Y51 + 1Y52 + 1Y53 = 1
1Y61 + 1Y62 + 1Y63 = 1
1Y71 + 1Y72 + 1Y73 = 1
1Y81 + 1Y82 + 1Y83 = 1
1Y91 + 1Y92 + 1Y93 = 1
1Y101 + 1Y102 + 1Y103 = 1
1Y111 + 1Y112 + 1Y113 = 1
1X211 + 1X311 + 1X411 + 1X511 + 1X611 + 1X711 + 1X811 + 1X911 + 1X1011 + 1X1111 -1Y11 = 0
1X121 + 1X321 + 1X421 + 1X521 + 1X621 + 1X721 + 1X821 + 1X921 + 1X1021 + 1X1121 -1Y21 = 0
1X131 + 1X231 + 1X431 + 1X531 + 1X631 + 1X731 + 1X831 + 1X931 + 1X1031 + 1X1131 -1Y31 = 0
1X141 + 1X241 + 1X341 + 1X541 + 1X641 + 1X741 + 1X841 + 1X941 + 1X1041 + 1X1141 -1Y41 = 0
1X151 + 1X251 + 1X351 + 1X451 + 1X651 + 1X751 + 1X851 + 1X951 + 1X1051 + 1X1151 -1Y51 = 0
1X161 + 1X261 + 1X361 + 1X461 + 1X561 + 1X761 + 1X861 + 1X961 + 1X1061 + 1X1161 -1Y61 = 0
1X171 + 1X271 + 1X371 + 1X471 + 1X571 + 1X671 + 1X871 + 1X971 + 1X1071 + 1X1171 -1Y71 = 0
1X181 + 1X281 + 1X381 + 1X481 + 1X581 + 1X681 + 1X781 + 1X981 + 1X1081 + 1X1181 -1Y81 = 0
1X191 + 1X291 + 1X391 + 1X491 + 1X591 + 1X691 + 1X791 + 1X891 + 1X1091 + 1X1191 -1Y91 = 0

1X1101 + 1X2101 + 1X3101 + 1X4101 + 1X5101 + 1X6101 + 1X7101 + 1X8101 + 1X9101 + 1X11101 -1Y101 = 0
1X1111 + 1X2111 + 1X3111 + 1X4111 + 1X5111 + 1X6111 + 1X7111 + 1X8111 + 1X9111 + 1X10111 -1Y111 = 0
1X212 + 1X312 + 1X412 + 1X512 + 1X612 + 1X712 + 1X812 + 1X912 + 1X1012 + 1X1112 -1Y12 = 0
1X122 + 1X322 + 1X422 + 1X522 + 1X622 + 1X722 + 1X822 + 1X922 + 1X1022 + 1X1122 -1Y22 = 0
1X132 + 1X232 + 1X432 + 1X532 + 1X632 + 1X732 + 1X832 + 1X932 + 1X1032 + 1X1132 -1Y32 = 0
1X142 + 1X242 + 1X342 + 1X542 + 1X642 + 1X742 + 1X842 + 1X942 + 1X1042 + 1X1142 -2Y42 = 0
1X152 + 1X252 + 1X352 + 1X452 + 1X652 + 1X752 + 1X852 + 1X952 + 1X1052 + 1X1152 -2Y52 = 0
1X162 + 1X262 + 1X362 + 1X462 + 1X562 + 1X762 + 1X862 + 1X962 + 1X1062 + 1X1162 -1Y62 = 0
1X172 + 1X272 + 1X372 + 1X472 + 1X572 + 1X672 + 1X872 + 1X972 + 1X1072 + 1X1172 -1Y72 = 0
1X182 + 1X282 + 1X382 + 1X482 + 1X582 + 1X682 + 1X782 + 1X982 + 1X1082 + 1X1182 -1Y82 = 0
1X192 + 1X292 + 1X392 + 1X492 + 1X592 + 1X692 + 1X792 + 1X892 + 1X1092 + 1X1192 -1Y92 = 0
1X1102 + 1X2102 + 1X3102 + 1X4102 + 1X5102 + 1X6102 + 1X7102 + 1X8102 + 1X9102 + 1X11102 -1Y102 = 0
1X1112 + 1X2112 + 1X3112 + 1X4112 + 1X5112 + 1X6112 + 1X7112 + 1X8112 + 1X9112 + 1X10112 -1Y112 = 0
1X213 + 1X313 + 1X413 + 1X513 + 1X613 + 1X713 + 1X813 + 1X913 + 1X1013 + 1X1113 -1Y13 = 0
1X123 + 1X323 + 1X423 + 1X523 + 1X623 + 1X723 + 1X823 + 1X923 + 1X1023 + 1X1123 -1Y23 = 0
1X133 + 1X233 + 1X433 + 1X533 + 1X633 + 1X733 + 1X833 + 1X933 + 1X1033 + 1X1133 -1Y33 = 0
1X143 + 1X243 + 1X343 + 1X543 + 1X643 + 1X743 + 1X843 + 1X943 + 1X1043 + 1X1143 -1Y43 = 0
1X153 + 1X253 + 1X353 + 1X453 + 1X653 + 1X753 + 1X853 + 1X953 + 1X1053 + 1X1153 -1Y53 = 0
1X163 + 1X263 + 1X363 + 1X463 + 1X563 + 1X763 + 1X863 + 1X963 + 1X1063 + 1X1163 -1Y63 = 0
1X173 + 1X273 + 1X373 + 1X473 + 1X573 + 1X673 + 1X873 + 1X973 + 1X1073 + 1X1173 -1Y73 = 0
1X183 + 1X283 + 1X383 + 1X483 + 1X583 + 1X683 + 1X783 + 1X983 + 1X1083 + 1X1183 -1Y83 = 0
1X193 + 1X293 + 1X393 + 1X493 + 1X593 + 1X693 + 1X793 + 1X893 + 1X1093 + 1X1193 -1Y93 = 0
1X1103 + 1X2103 + 1X3103 + 1X4103 + 1X5103 + 1X6103 + 1X7103 + 1X8103 + 1X9103 + 1X11103 -1Y103 = 0
1X1113 + 1X2113 + 1X3113 + 1X4113 + 1X5113 + 1X6113 + 1X7113 + 1X8113 + 1X9113 + 1X10113 -1Y113 = 0
1X121 + 1X131 + 1X141 + 1X151 + 1X161 + 1X171 + 1X181 + 1X191 + 1X1101 + 1X1111 -1Y11 = 0
1X211 + 1X231 + 1X241 + 1X251 + 1X261 + 1X271 + 1X281 + 1X291 + 1X2101 + 1X2111 -1Y21 = 0
1X311 + 1X321 + 1X341 + 1X351 + 1X361 + 1X371 + 1X381 + 1X391 + 1X3101 + 1X3111 -1Y31 = 0
1X411 + 1X421 + 1X431 + 1X451 + 1X461 + 1X471 + 1X481 + 1X491 + 1X4101 + 1X4111 -1Y41 = 0
1X511 + 1X521 + 1X531 + 1X541 + 1X561 + 1X571 + 1X581 + 1X591 + 1X5101 + 1X5111 -1Y51 = 0
1X611 + 1X621 + 1X631 + 1X641 + 1X651 + 1X671 + 1X681 + 1X691 + 1X6101 + 1X6111 -1Y61 = 0
1X711 + 1X721 + 1X731 + 1X741 + 1X751 + 1X761 + 1X781 + 1X791 + 1X7101 + 1X7111 -1Y71 = 0
1X811 + 1X821 + 1X831 + 1X841 + 1X851 + 1X861 + 1X871 + 1X891 + 1X8101 + 1X8111 -1Y81 = 0
1X911 + 1X921 + 1X931 + 1X941 + 1X951 + 1X961 + 1X971 + 1X981 + 1X9101 + 1X9111 -1Y91 = 0
1X1011 + 1X1021 + 1X1031 + 1X1041 + 1X1051 + 1X1061 + 1X1071 + 1X1081 + 1X1091 + 1X10111 -1Y101 = 0
1X1111 + 1X1121 + 1X1131 + 1X1141 + 1X1151 + 1X1161 + 1X1171 + 1X1181 + 1X1191 + 1X11101 -1Y111 = 0
1X122 + 1X132 + 1X142 + 1X152 + 1X162 + 1X172 + 1X182 + 1X192 + 1X1102 + 1X1112 -1Y12 = 0
1X212 + 1X232 + 1X242 + 1X252 + 1X262 + 1X272 + 1X282 + 1X292 + 1X2102 + 1X2112 -1Y22 = 0
1X312 + 1X322 + 1X342 + 1X352 + 1X362 + 1X372 + 1X382 + 1X392 + 1X3102 + 1X3112 -1Y32 = 0
1X412 + 1X422 + 1X432 + 1X452 + 1X462 + 1X472 + 1X482 + 1X492 + 1X4102 + 1X4112 -1Y42 = 0
1X512 + 1X522 + 1X532 + 1X542 + 1X562 + 1X572 + 1X582 + 1X592 + 1X5102 + 1X5112 -1Y52 = 0
1X612 + 1X622 + 1X632 + 1X642 + 1X652 + 1X672 + 1X682 + 1X692 + 1X6102 + 1X6112 -1Y62 = 0
1X712 + 1X722 + 1X732 + 1X742 + 1X752 + 1X762 + 1X782 + 1X792 + 1X7102 + 1X7112 -1Y72 = 0
1X812 + 1X822 + 1X832 + 1X842 + 1X852 + 1X862 + 1X872 + 1X892 + 1X8102 + 1X8112 -1Y82 = 0
1X912 + 1X922 + 1X932 + 1X942 + 1X952 + 1X962 + 1X972 + 1X982 + 1X9102 + 1X9112 -1Y92 = 0
1X1012 + 1X1022 + 1X1032 + 1X1042 + 1X1052 + 1X1062 + 1X1072 + 1X1082 + 1X1092 + 1X10112 -1Y102 = 0
1X1112 + 1X1122 + 1X1132 + 1X1142 + 1X1152 + 1X1162 + 1X1172 + 1X1182 + 1X1192 + 1X11102 -1Y112 = 0

$$\begin{aligned}
 &1X123 + 1X133 + 1X143 + 1X153 + 1X163 + 1X173 + 1X183 + 1X193 + 1X1103 + 1X1113 - 1Y13 = 0 \\
 &1X213 + 1X233 + 1X243 + 1X253 + 1X263 + 1X273 + 1X283 + 1X293 + 1X2103 + 1X2113 - 1Y23 = 0 \\
 &1X313 + 1X323 + 1X343 + 1X353 + 1X363 + 1X373 + 1X383 + 1X393 + 1X3103 + 1X3113 - 1Y33 = 0 \\
 &1X413 + 1X423 + 1X433 + 1X453 + 1X463 + 1X473 + 1X483 + 1X493 + 1X4103 + 1X4113 - 1Y43 = 0 \\
 &1X513 + 1X523 + 1X533 + 1X543 + 1X563 + 1X573 + 1X583 + 1X593 + 1X5103 + 1X5113 - 1Y53 = 0 \\
 &1X613 + 1X623 + 1X633 + 1X643 + 1X653 + 1X673 + 1X683 + 1X693 + 1X6103 + 1X6113 - 1Y63 = 0 \\
 &1X713 + 1X723 + 1X733 + 1X743 + 1X753 + 1X763 + 1X783 + 1X793 + 1X7103 + 1X7113 - 1Y73 = 0 \\
 &1X813 + 1X823 + 1X833 + 1X843 + 1X853 + 1X863 + 1X873 + 1X893 + 1X8103 + 1X8113 - 1Y83 = 0 \\
 &1X913 + 1X923 + 1X933 + 1X943 + 1X953 + 1X963 + 1X973 + 1X983 + 1X9103 + 1X9113 - 1Y93 = 0 \\
 &1X1013 + 1X1023 + 1X1033 + 1X1043 + 1X1053 + 1X1063 + 1X1073 + 1X1083 + 1X1093 + 1X10113 - 1Y103 = 0 \\
 &1X1113 + 1X1123 + 1X1133 + 1X1143 + 1X1153 + 1X1163 + 1X1173 + 1X1183 + 1X1193 + 1X11103 - 1Y113 = 0 \\
 &1X131 + 1X141 + 1X151 + 1X161 + 1X171 + 1X181 + 1X191 + 1X1101 + 1X1111 + 1X211 + 1X231 + 1X241 + 1X251 + 1X261 + 1X271 + \\
 &1X281 + 1X291 + 1X2101 + 1X2111 + 1X311 + 1X321 + 1X341 + 1X351 + 1X361 + 1X371 + 1X381 + 1X391 + 1X3101 + 1X3111 + 1X411 + \\
 &1X421 + 1X431 + 1X451 + 1X461 + 1X471 + 1X481 + 1X491 + 1X4101 + 1X4111 + 1X511 + 1X521 + 1X531 + 1X541 + 1X561 + 1X571 + \\
 &1X581 + 1X591 + 1X5101 + 1X5111 + 1X611 + 1X621 + 1X631 + 1X641 + 1X651 + 1X671 + 1X681 + 1X691 + 1X6101 + 1X6111 + 1X711 + \\
 &1X721 + 1X731 + 1X741 + 1X751 + 1X761 + 1X781 + 1X791 + 1X7101 + 1X7111 + 1X811 + 1X821 + 1X831 + 1X841 + 1X851 + 1X861 + \\
 &1X871 + 1X891 + 1X8101 + 1X8111 + 1X911 + 1X921 + 1X931 + 1X941 + 1X951 + 1X961 + 1X971 + 1X981 + 1X9101 + 1X9111 \leq 9 \\
 &1X132 + 1X142 + 1X152 + 1X162 + 1X172 + 1X182 + 1X192 + 1X1102 + 1X1112 + 1X212 + 1X232 + 1X242 + 1X252 + 1X262 + 1X272 + \\
 &1X282 + 1X292 + 1X2102 + 1X2112 + 1X312 + 1X322 + 1X342 + 1X352 + 1X362 + 1X372 + 1X382 + 1X392 + 1X3102 + 1X3112 + 1X412 + \\
 &1X422 + 1X432 + 1X452 + 1X462 + 1X472 + 1X482 + 1X492 + 1X4102 + 1X4112 + 1X512 + 1X522 + 1X532 + 1X542 + 1X562 + 1X572 + \\
 &1X582 + 1X592 + 1X5102 + 1X5112 + 1X612 + 1X622 + 1X632 + 1X642 + 1X652 + 1X672 + 1X682 + 1X692 + 1X6102 + 1X6112 + 1X712 + \\
 &1X722 + 1X732 + 1X742 + 1X752 + 1X762 + 1X782 + 1X792 + 1X7102 + 1X7112 + 1X812 + 1X822 + 1X832 + 1X842 + 1X852 + 1X862 + \\
 &1X872 + 1X892 + 1X8102 + 1X8112 + 1X912 + 1X922 + 1X932 + 1X942 + 1X952 + 1X962 + 1X972 + 1X982 + 1X9102 + 1X9112 \leq 9 \\
 &1X133 + 1X143 + 1X153 + 1X163 + 1X173 + 1X183 + 1X193 + 1X1103 + 1X1113 + 1X213 + 1X233 + 1X243 + 1X253 + 1X263 + 1X273 + \\
 &1X283 + 1X293 + 1X2103 + 1X2113 + 1X313 + 1X323 + 1X343 + 1X353 + 1X363 + 1X373 + 1X383 + 1X393 + 1X3103 + 1X3113 + 1X413 + \\
 &1X423 + 1X433 + 1X453 + 1X463 + 1X473 + 1X483 + 1X493 + 1X4103 + 1X4113 + 1X513 + 1X523 + 1X533 + 1X543 + 1X563 + 1X573 + \\
 &1X583 + 1X593 + 1X5103 + 1X5113 + 1X613 + 1X623 + 1X633 + 1X643 + 1X653 + 1X673 + 1X683 + 1X693 + 1X6103 + 1X6113 + 1X713 + \\
 &1X723 + 1X733 + 1X743 + 1X753 + 1X763 + 1X783 + 1X793 + 1X7103 + 1X7113 + 1X813 + 1X823 + 1X833 + 1X843 + 1X853 + 1X863 + \\
 &1X873 + 1X893 + 1X8103 + 1X8113 + 1X913 + 1X923 + 1X933 + 1X943 + 1X953 + 1X963 + 1X973 + 1X983 + 1X9103 + 1X9113 \leq 9 \\
 &\forall \\
 &X_{ijk} = 0,1 \quad i, j, y, k \\
 &Y_{ik} = 0,1 \quad i, y, k
 \end{aligned}$$

APÉNDICE B

Informe de respuestas parcial originado por el programa *OR Brainware Decision Tools*



Informe de respuestas
OR Brainware Decision Tools
Informe creado el : 03/09/2015 a las 11:40:46 a.m.
Resultado: OpenSolver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

Celda Objetivo

| Celda | Valor Final |
|----------|-------------|
| \$CRG\$5 | 941 |

Celdas de Variables

| Celda | Nombre | Valor Final |
|---------|--------|-------------|
| \$E\$3 | X121 | 0 |
| \$F\$3 | X122 | 0 |
| \$G\$3 | X123 | 0 |
| \$H\$3 | X131 | 0 |
| \$I\$3 | X132 | 0 |
| \$J\$3 | X133 | 0 |
| \$K\$3 | X141 | 0 |
| \$L\$3 | X142 | 0 |
| \$M\$3 | X143 | 1 |
| \$N\$3 | X151 | 0 |
| \$O\$3 | X152 | 0 |
| \$P\$3 | X153 | 0 |
| \$Q\$3 | X161 | 0 |
| \$R\$3 | X162 | 0 |
| \$S\$3 | X163 | 0 |
| \$T\$3 | X171 | 1 |
| \$U\$3 | X172 | 0 |
| \$V\$3 | X173 | 0 |
| \$W\$3 | X181 | 0 |
| \$X\$3 | X182 | 1 |
| \$Y\$3 | X183 | 0 |
| \$Z\$3 | X191 | 0 |
| \$AA\$3 | X192 | 0 |
| \$AB\$3 | X193 | 0 |

| | | |
|---------|-------|---|
| \$AC\$3 | X1101 | 0 |
| \$AD\$3 | X1102 | 0 |
| \$AE\$3 | X1103 | 0 |
| \$AF\$3 | X1111 | 0 |
| \$AG\$3 | X1112 | 0 |
| \$AH\$3 | X1113 | 0 |
| \$AI\$3 | X211 | 0 |
| \$AJ\$3 | X212 | 0 |
| \$AK\$3 | X213 | 0 |
| \$AL\$3 | X231 | 0 |
| \$AM\$3 | X232 | 0 |
| \$AN\$3 | X233 | 0 |
| \$AO\$3 | X241 | 0 |
| \$AP\$3 | X242 | 0 |
| \$AQ\$3 | X243 | 0 |
| \$AR\$3 | X251 | 0 |
| \$AS\$3 | X252 | 0 |
| \$AT\$3 | X253 | 0 |
| \$AU\$3 | X261 | 0 |
| \$AV\$3 | X262 | 0 |
| \$AW\$3 | X263 | 0 |
| \$AX\$3 | X271 | 0 |
| \$AY\$3 | X272 | 0 |
| \$AZ\$3 | X273 | 0 |
| \$BA\$3 | X281 | 0 |
| \$BB\$3 | X282 | 0 |
| \$BC\$3 | X283 | 0 |
| \$BD\$3 | X291 | 0 |
| \$BE\$3 | X292 | 0 |
| \$BF\$3 | X293 | 0 |
| \$BG\$3 | X2101 | 0 |
| \$BH\$3 | X2102 | 0 |
| \$BI\$3 | X2103 | 0 |
| \$BJ\$3 | X2111 | 0 |
| \$BK\$3 | X2112 | 0 |
| \$BL\$3 | X2113 | 1 |
| \$BM\$3 | X311 | 0 |
| \$BN\$3 | X312 | 0 |
| \$BO\$3 | X313 | 0 |
| \$BP\$3 | X321 | 0 |

| | | |
|---------|-------|---|
| \$BQ\$3 | X322 | 0 |
| \$BR\$3 | X323 | 0 |
| \$BS\$3 | X341 | 0 |
| \$BT\$3 | X342 | 0 |
| \$BU\$3 | X343 | 0 |
| \$BV\$3 | X351 | 1 |
| \$BW\$3 | X352 | 0 |
| \$BX\$3 | X353 | 0 |
| \$BY\$3 | X361 | 0 |
| \$BZ\$3 | X362 | 0 |
| \$CA\$3 | X363 | 0 |
| \$CB\$3 | X371 | 0 |
| \$CC\$3 | X372 | 0 |
| \$CD\$3 | X373 | 0 |
| \$CE\$3 | X381 | 0 |
| \$CF\$3 | X382 | 0 |
| \$CG\$3 | X383 | 0 |
| \$CH\$3 | X391 | 0 |
| \$CI\$3 | X392 | 0 |
| \$CJ\$3 | X393 | 0 |
| \$CK\$3 | X3101 | 0 |
| \$CL\$3 | X3102 | 0 |
| \$CM\$3 | X3103 | 0 |
| \$CN\$3 | X3111 | 0 |
| \$CO\$3 | X3112 | 0 |
| \$CP\$3 | X3113 | 0 |
| \$CQ\$3 | X411 | 0 |
| \$CR\$3 | X412 | 0 |
| \$CS\$3 | X413 | 1 |
| \$CT\$3 | X421 | 0 |
| \$CU\$3 | X422 | 0 |
| \$CV\$3 | X423 | 0 |
| \$CW\$3 | X431 | 0 |
| \$CX\$3 | X432 | 0 |
| \$CY\$3 | X433 | 0 |
| \$CZ\$3 | X451 | 0 |
| \$DA\$3 | X452 | 0 |
| \$DB\$3 | X453 | 0 |
| \$DC\$3 | X461 | 0 |
| \$DD\$3 | X462 | 0 |

| | | |
|---------|-------|---|
| \$DE\$3 | X463 | 0 |
| \$DF\$3 | X471 | 0 |
| \$DG\$3 | X472 | 0 |
| \$DH\$3 | X473 | 0 |
| \$DI\$3 | X481 | 0 |
| \$DJ\$3 | X482 | 0 |
| \$DK\$3 | X483 | 0 |
| \$DL\$3 | X491 | 0 |
| \$DM\$3 | X492 | 0 |
| \$DN\$3 | X493 | 0 |
| \$DO\$3 | X4101 | 0 |
| \$DP\$3 | X4102 | 0 |
| \$DQ\$3 | X4103 | 0 |
| \$DR\$3 | X4111 | 0 |
| \$DS\$3 | X4112 | 0 |
| \$DT\$3 | X4113 | 0 |
| \$DU\$3 | X511 | 0 |
| \$DV\$3 | X512 | 0 |
| \$DW\$3 | X513 | 0 |
| \$DX\$3 | X521 | 0 |
| \$DY\$3 | X522 | 0 |
| \$DZ\$3 | X523 | 0 |
| \$EA\$3 | X531 | 0 |
| \$EB\$3 | X532 | 0 |
| \$EC\$3 | X533 | 0 |
| \$ED\$3 | X541 | 0 |
| \$EE\$3 | X542 | 0 |
| \$EF\$3 | X543 | 0 |
| \$EG\$3 | X561 | 1 |
| \$EH\$3 | X562 | 0 |
| \$EI\$3 | X563 | 0 |
| \$EJ\$3 | X571 | 0 |
| \$EK\$3 | X572 | 0 |
| \$EL\$3 | X573 | 0 |
| \$EM\$3 | X581 | 0 |
| \$EN\$3 | X582 | 0 |
| \$EO\$3 | X583 | 0 |
| \$EP\$3 | X591 | 0 |
| \$EQ\$3 | X592 | 0 |
| \$ER\$3 | X593 | 0 |

| | | |
|---------|-------|---|
| \$ES\$3 | X5101 | 0 |
| \$ET\$3 | X5102 | 0 |
| \$EU\$3 | X5103 | 0 |
| \$EV\$3 | X5111 | 0 |
| \$EW\$3 | X5112 | 0 |
| \$EX\$3 | X5113 | 0 |
| \$EY\$3 | X611 | 0 |
| \$EZ\$3 | X612 | 0 |
| \$FA\$3 | X613 | 0 |
| \$FB\$3 | X621 | 0 |
| \$FC\$3 | X622 | 0 |
| \$FD\$3 | X623 | 0 |
| \$FE\$3 | X631 | 1 |
| \$FF\$3 | X632 | 0 |
| \$FG\$3 | X633 | 0 |
| \$FH\$3 | X641 | 0 |
| \$FI\$3 | X642 | 0 |
| \$FJ\$3 | X643 | 0 |
| \$FK\$3 | X651 | 0 |
| \$FL\$3 | X652 | 0 |
| \$FM\$3 | X653 | 0 |
| \$FN\$3 | X671 | 0 |
| \$FO\$3 | X672 | 0 |
| \$FP\$3 | X673 | 0 |
| \$FQ\$3 | X681 | 0 |
| \$FR\$3 | X682 | 0 |
| \$FS\$3 | X683 | 0 |
| \$FT\$3 | X691 | 0 |
| \$FU\$3 | X692 | 0 |
| \$FV\$3 | X693 | 0 |
| \$FW\$3 | X6101 | 0 |
| \$FX\$3 | X6102 | 0 |
| \$FY\$3 | X6103 | 0 |
| \$FZ\$3 | X6111 | 0 |
| \$GA\$3 | X6112 | 0 |
| \$GB\$3 | X6113 | 0 |
| \$GC\$3 | X711 | 1 |
| \$GD\$3 | X712 | 0 |
| \$GE\$3 | X713 | 0 |
| \$GF\$3 | X721 | 0 |

| | | |
|---------|-------|---|
| \$GG\$3 | X722 | 0 |
| \$GH\$3 | X723 | 0 |
| \$GI\$3 | X731 | 0 |
| \$GJ\$3 | X732 | 0 |
| \$GK\$3 | X733 | 0 |
| \$GL\$3 | X741 | 0 |
| \$GM\$3 | X742 | 0 |
| \$GN\$3 | X743 | 0 |
| \$GO\$3 | X751 | 0 |
| \$GP\$3 | X752 | 0 |
| \$GQ\$3 | X753 | 0 |
| \$GR\$3 | X761 | 0 |
| \$GS\$3 | X762 | 0 |
| \$GT\$3 | X763 | 0 |
| \$GU\$3 | X781 | 0 |
| \$GV\$3 | X782 | 0 |
| \$GW\$3 | X783 | 0 |
| \$GX\$3 | X791 | 0 |
| \$GY\$3 | X792 | 0 |
| \$GZ\$3 | X793 | 0 |
| \$HA\$3 | X7101 | 0 |
| \$HB\$3 | X7102 | 0 |
| \$HC\$3 | X7103 | 0 |
| \$HD\$3 | X7111 | 0 |
| \$HE\$3 | X7112 | 0 |
| \$HF\$3 | X7113 | 0 |
| \$HG\$3 | X811 | 0 |
| \$HH\$3 | X812 | 1 |
| \$HI\$3 | X813 | 0 |
| \$HJ\$3 | X821 | 0 |
| \$HK\$3 | X822 | 0 |
| \$HL\$3 | X823 | 0 |
| \$HM\$3 | X831 | 0 |
| \$HN\$3 | X832 | 0 |
| \$HO\$3 | X833 | 0 |
| \$HP\$3 | X841 | 0 |
| \$HQ\$3 | X842 | 0 |
| \$HR\$3 | X843 | 0 |
| \$HS\$3 | X851 | 0 |
| \$HT\$3 | X852 | 0 |

| | | |
|---------|-------|---|
| \$HU\$3 | X853 | 0 |
| \$HV\$3 | X861 | 0 |
| \$HW\$3 | X862 | 0 |
| \$HX\$3 | X863 | 0 |
| \$HY\$3 | X871 | 0 |
| \$HZ\$3 | X872 | 0 |
| \$IA\$3 | X873 | 0 |
| \$IB\$3 | X891 | 0 |
| \$IC\$3 | X892 | 0 |
| \$ID\$3 | X893 | 0 |
| \$IE\$3 | X8101 | 0 |
| \$IF\$3 | X8102 | 0 |
| \$IG\$3 | X8103 | 0 |
| \$IH\$3 | X8111 | 0 |
| \$II\$3 | X8112 | 0 |
| \$IJ\$3 | X8113 | 0 |
| \$IK\$3 | X911 | 0 |
| \$IL\$3 | X912 | 0 |
| \$IM\$3 | X913 | 0 |
| \$IN\$3 | X921 | 0 |
| \$IO\$3 | X922 | 0 |
| \$IP\$3 | X923 | 0 |
| \$IQ\$3 | X931 | 0 |
| \$IR\$3 | X932 | 0 |
| \$IS\$3 | X933 | 0 |
| \$IT\$3 | X941 | 0 |
| \$IU\$3 | X942 | 0 |
| \$IV\$3 | X943 | 0 |
| \$IW\$3 | X951 | 0 |
| \$IX\$3 | X952 | 0 |
| \$IY\$3 | X953 | 0 |
| \$IZ\$3 | X961 | 0 |
| \$JA\$3 | X962 | 0 |
| \$JB\$3 | X963 | 0 |
| \$JC\$3 | X971 | 0 |
| \$JD\$3 | X972 | 0 |
| \$JE\$3 | X973 | 0 |
| \$JF\$3 | X981 | 0 |
| \$JG\$3 | X982 | 0 |
| \$JH\$3 | X983 | 0 |

| | | |
|---------|--------|---|
| \$JL\$3 | X9101 | 0 |
| \$JJ\$3 | X9102 | 1 |
| \$JK\$3 | X9103 | 0 |
| \$JL\$3 | X9111 | 0 |
| \$JM\$3 | X9112 | 0 |
| \$JN\$3 | X9113 | 0 |
| \$JO\$3 | X1011 | 0 |
| \$JP\$3 | X1012 | 0 |
| \$JQ\$3 | X1013 | 0 |
| \$JR\$3 | X1021 | 0 |
| \$JS\$3 | X1022 | 0 |
| \$JT\$3 | X1023 | 0 |
| \$JU\$3 | X1031 | 0 |
| \$JV\$3 | X1032 | 0 |
| \$JW\$3 | X1033 | 0 |
| \$JX\$3 | X1041 | 0 |
| \$JY\$3 | X1042 | 0 |
| \$JZ\$3 | X1043 | 0 |
| \$KA\$3 | X1051 | 0 |
| \$KB\$3 | X1052 | 0 |
| \$KC\$3 | X1053 | 0 |
| \$KD\$3 | X1061 | 0 |
| \$KE\$3 | X1062 | 0 |
| \$KF\$3 | X1063 | 0 |
| \$KG\$3 | X1071 | 0 |
| \$KH\$3 | X1072 | 0 |
| \$KI\$3 | X1073 | 0 |
| \$KJ\$3 | X1081 | 0 |
| \$KK\$3 | X1082 | 0 |
| \$KL\$3 | X1083 | 0 |
| \$KM\$3 | X1091 | 0 |
| \$KN\$3 | X1092 | 1 |
| \$KO\$3 | X1093 | 0 |
| \$KP\$3 | X10111 | 0 |
| \$KQ\$3 | X10112 | 0 |
| \$KR\$3 | X10113 | 0 |
| \$KS\$3 | X1111 | 0 |
| \$KT\$3 | X1112 | 0 |
| \$KU\$3 | X1113 | 0 |
| \$KV\$3 | X1121 | 0 |

| | | |
|---------|--------|---|
| \$KW\$3 | X1122 | 0 |
| \$KX\$3 | X1123 | 1 |
| \$KY\$3 | X1131 | 0 |
| \$KZ\$3 | X1132 | 0 |
| \$LA\$3 | X1133 | 0 |
| \$LB\$3 | X1141 | 0 |
| \$LC\$3 | X1142 | 0 |
| \$LD\$3 | X1143 | 0 |
| \$LE\$3 | X1151 | 0 |
| \$LF\$3 | X1152 | 0 |
| \$LG\$3 | X1153 | 0 |
| \$LH\$3 | X1161 | 0 |
| \$LI\$3 | X1162 | 0 |
| \$LJ\$3 | X1163 | 0 |
| \$LK\$3 | X1171 | 0 |
| \$LL\$3 | X1172 | 0 |
| \$LM\$3 | X1173 | 0 |
| \$LN\$3 | X1181 | 0 |
| \$LO\$3 | X1182 | 0 |
| \$LP\$3 | X1183 | 0 |
| \$LQ\$3 | X1191 | 0 |
| \$LR\$3 | X1192 | 0 |
| \$LS\$3 | X1193 | 0 |
| \$LT\$3 | X11101 | 0 |
| \$LU\$3 | X11102 | 0 |
| \$LV\$3 | X11103 | 0 |
| \$LW\$3 | Y11 | 1 |
| \$LX\$3 | Y12 | 1 |
| \$LY\$3 | Y13 | 1 |
| \$LZ\$3 | Y21 | 0 |
| \$MA\$3 | Y22 | 0 |
| \$MB\$3 | Y23 | 1 |
| \$MC\$3 | Y31 | 1 |
| \$MD\$3 | Y32 | 0 |
| \$ME\$3 | Y33 | 0 |
| \$MF\$3 | Y41 | 0 |
| \$MG\$3 | Y42 | 0 |
| \$MH\$3 | Y43 | 1 |
| \$MI\$3 | Y51 | 1 |
| \$MJ\$3 | Y52 | 0 |

| | | |
|---------|------|---|
| \$MK\$3 | Y53 | 0 |
| \$ML\$3 | Y61 | 1 |
| \$MM\$3 | Y62 | 0 |
| \$MN\$3 | Y63 | 0 |
| \$MO\$3 | Y71 | 1 |
| \$MP\$3 | Y72 | 0 |
| \$MQ\$3 | Y73 | 0 |
| \$MR\$3 | Y81 | 0 |
| \$MS\$3 | Y82 | 1 |
| \$MT\$3 | Y83 | 0 |
| \$MU\$3 | Y91 | 0 |
| \$MV\$3 | Y92 | 1 |
| \$MW\$3 | Y93 | 0 |
| \$MX\$3 | Y101 | 0 |
| \$MY\$3 | Y102 | 1 |
| \$MZ\$3 | Y103 | 0 |
| \$NA\$3 | Y111 | 0 |
| \$NB\$3 | Y112 | 0 |
| \$NC\$3 | Y113 | 1 |

APÉNDICE C

Restricciones adicionales al modelo para buscar la optimización

$$1X171 + 1X711 \leq 1$$

$$1X361 + 1X531 + 1X651 \leq 2$$

$$1X182 + 1X812 \leq 1$$

$$1X9102 + 1X1092 \leq 1$$

$$1X143 + 1X413 \leq 1$$

$$1X2112 + 1X1122 \leq 1$$

$$1X141 + 1X411 \leq 1$$

$$1X2G1 + 1XG21 \leq 1$$

$$1X9101 * 1X1091 \leq 1$$

$$1X172 + 1X7112 + 1X1112 \leq 2$$

$$1X183 + 1X813 \leq 1$$

$$1X353 + 1X533 \leq 1$$

$$1X181 + 1X811 \leq 1$$

$$1X2G1 + 1X521 + 1XG51 \leq 2$$

$$1X172 + 1X712 \leq 1$$

$$1X3113 + 1X1132 \leq 1$$

$$1X193 + 1X413 + 1X9103 + 1X1043 \leq 3$$

$$1X141 + 1X281 + 1X421 * 1X811 \leq 3$$

$$1X351 + 1X531 \leq 1$$

$$1X1112 + 1X712 + 1X1172 \leq 1$$

$$1X163 + 1X613 \leq 1$$

$$1X9103 + 1X1093 \leq 1$$

$$1X141 + 1X4101 + 1X911 + 1X1091 \leq 3$$

$$1X251 + 1X521 \leq 1$$

$$1X182 + 1X612 + 1X862 \leq 2$$

$$1X173 + 1X713 \leq 1$$

$$1X3113 + 1X1133 \leq 1$$

$$1X181 + 1X251 + 1X411 + 1X5101 + 1X821 + 1X1041 \leq 5$$

$$1X192 + 1X712 + 1X972 \leq 2$$

$$1X1113 + 1X1113 \leq 1$$

$$1X363 + 1X633 \leq 1$$

$$1X141 + 1X281 + 1X4101 + 1X521 + 1X811 + 1X1051 \leq 5$$

$$1X1112 + 1X1112 \leq 1$$

$$1X362 + 1X632 \leq 1$$

$$1X193 + 1X713 + 1X973 \leq 2$$

$$1X141 + 1X4101 + 1X811 + 1X1081 \leq 3$$

$$1X2111 + 1X1121 \leq 1$$

$$1X172 + 1X792 + 1X912 \leq 2$$

$$1X133 + 1X353 + 1X563 + 1X613 \leq 3$$

\leq